УДК 517.929.4
doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-6

# Устойчивость решений систем параболических уравнений с запаздываниями

**И. В. Бойков**

Пензенский государственный университет, Пенза, Россия
boikov@pnzgu.ru

**Аннотация.** *Актуальность и цели.* Работа посвящена анализу устойчивости в смысле Ляпунова установившихся решений систем линейных параболических уравнений с коэффициентами, зависящими от времени, и с запаздываниям, зависящими от времени. Рассматриваются случаи непрерывного и импульсного возмущений. *Материалы и методы.* Метод исследования устойчивости решений систем линейных параболических уравнений состоит в следующем. Применив преобразование Фурье к исходной системе параболических уравнений, приходим к определенной в спектральной области системе нестационарных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. Сначала устойчивость полученной системы исследуется методом замороженных коэффициентов в метрике пространства $R_n$ $n$-мерных векторов. Затем полученные утверждения распространяются на пространство $L_2$. Применение равенства Парсеваля позволяет вернуться в область оригиналов и получить достаточные условия устойчивости решений систем линейных параболических уравнений. *Результаты.* Предложен алгоритм, позволяющий получать достаточные условия устойчивости решений конечных систем линейных параболических уравнений с коэффициентами и с запаздываниями, зависящими от времени. Достаточные условия устойчивости выражены через логарифмические нормы матриц, составленных из коэффициентов системы параболических уравнений. Они получены в метрике пространства $L_2$. Алгоритмы построения достаточных условий устойчивости эффективны как в случае непрерывных, так и в случае импульсных возмущений. *Выводы.* Предложен метод построения достаточных условий устойчивости решений конечных систем линейных параболических уравнений с коэффициентами и запаздываниями, зависящими от времени. Метод может быть использован при исследовании нестационарных динамических систем, описываемых системами линейных параболических уравнений с запаздываниями, зависящими от времени.

**Ключевые слова**: устойчивость по Ляпунову, системы параболических уравнений, запаздывания, логарифмическая норма

**Для цитирования**: Бойков И. В. Устойчивость решений систем параболических уравнений с запаздываниями // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2023. № 1. С. 69–84. doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-6

# Stability of solutions for systems of delayed parabolic equations

**I.V. Boykov**

Penza State University, Penza, Russia
boikov@pnzgu.ru

**Abstract.** *Background.* The study is devoted to the analysis of stability in the sense Lyapunov steady state solutions for systems of linear parabolic equations with coefficients depending on time, and with delays depending on time. The cases of continuous and impulsive perturbations are considered. *Materials and methods.* A method for studying the stability of solutions to systems of linear parabolic equations is as follows. Applying the Fourier transform to the original system of parabolic equations, we arrive at a system of non-stationary ordinary differential equations defined in the spectral region. First, the stability of the resulting system is studied by the method of frozen coefficients in the metric of the space $R_n$ of *n*-dimensional vectors. Then the resulting statements are extended to the space $L_2$. The application of the Parseval equality allows us to return to the domain of the originals and obtain sufficient conditions for the stability of solutions to systems of linear parabolic equations. *Results.* An algorithm is proposed that allows one to obtain sufficient stability conditions for solutions of finite systems of linear parabolic equations with time-dependent coefficients and with time-dependent delays. Sufficient stability conditions are expressed in terms of the logarithmic norms of matrices composed of the coefficients of the system of parabolic equations. They are obtained in the metric of the space $L_2$. Algorithms for constructing sufficient stability conditions are efficient, as in the case continuous, and in the case of impulsive perturbations. *Conclusions.* A method for constructing sufficient stability conditions for solutions of finite systems of linear parabolic equations with time-dependent coefficients and delays. The method can be used in the study non-stationary dynamical systems described by systems of linear parabolic equations with delays depending from time.

**Keywords**: Lyapunov stability, systems of parabolic equations, delays, logarithmic norm

**For citation**: Boykov I.V. Stability of solutions for systems of delayed parabolic equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2023;(1):69–84. (In Russ.). doi: 10.21685/2072-3040-2023-1-6

## Введение

Исследованию устойчивости решений систем параболических уравнений посвящена обширная литература, подробная библиография которой приведена в монографиях [1–6] и обзорах [7, 8]. Отметим также статьи [9–17], в которых представлены различные постановки задач устойчивости решений систем параболических уравнений и различные методы исследования устойчивости. Отметим, что наряду с регулярными рассматриваются критические случаи [18].

Основным методом исследования устойчивости решений систем уравнений в частных производных является второй метод Ляпунова и основным алгоритмом исследования устойчивости решений систем уравнений в частных производных является построение обобщенных функционалов Ляпунова – Красовского.

В работах [6, 19, 20] для исследования устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений и систем уравнений в частных производных применяется первый метод Ляпунова. Полученные условия устойчивости применимы как в регулярном, так и в критических случаях.

В данной работе этот метод распространяется на исследование устойчивости решений систем параболических уравнений с запаздыванием, зависящим от времени.

## 1. Вспомогательные утверждения

Пусть $X$ – банахово пространство; $K$ – оператор, действующий из $X$ в $X$; $B(a,r)=\{x,a\in X:\|x-a\|\le r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора $K$, определяемая [21] выражением

$$\Lambda(K)=\lim_{h\downarrow 0}(\|I+hK\|-1)/h,$$

где $h\downarrow 0$ означает, что $h$ стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана комплексная матрица $A=\{a_{ij}\}$, $i,j=1,2,\dots,n$, в $n$-мерном пространстве $R_n$ векторов $x=(x_1,\dots,x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1=\sum_{k=1}^{n}|x_k|,\ \|x\|_2=\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{1/2},\ \|x\|_3=\max_{1\le k\le n}|x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы $A$ равна [22]:

$$\Lambda_1(A)=\max_j\left(\mathrm{Re}\{a_{jj}\}+\sum_{i=1,i\ne j}^{n}|a_{ij}|\right),\quad \Lambda_2(A)=\lambda_{\max}\left(\frac{A+A^T}{2}\right),$$

$$\Lambda_3(A)=\max_i\left(\mathrm{Re}\{a_{ii}\}+\sum_{j=1,j\ne i}^{n}|a_{ij}|\right),$$

здесь $\lambda_{\max}((A+A^T)/2)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A+A^T)/2$.

## 2. Устойчивость решений систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями

Рассмотрим систему линейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями:

$$\frac{dx_i(t)}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j(t)+\sum_{j=1}^{n}b_{ij}(t)x_j(t-h_{ij}(t)),\ i=1,2,...,n, \tag{1}$$

где $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i,j=1,2,...,n$, – непрерывные функции; $h_{ij}(t)$ – непрерывные функции, удовлетворяющие следующим условиям: $0<h_*\le h_{ij}\le h_{ij}(t)\le$ $\le H_{ij}\le H^*$, $i,j=1,2,...,n$, при $0\le t<\infty$.

Пусть при $-H^*\le t\le 0$ выполняется условие

$$x_i(t)=\eta_i(t),\ i=1,2,...,n, \tag{2}$$

где $\eta_i(t), i=1,2,...,n,$ – непрерывные функции.

Будем считать, что при условиях (2) система уравнений (1) имеет установившееся решение $x^*(t) = (x_1^*(t), \cdots, x_n^*(t)),\ \ t \ge 0.$

Пусть $A(t) = \{a_{ij}(t)\}, B(t) = \{b_{ij}(t)\}, i, j = 1, 2, .., n.$

Устойчивость решений систем уравнений вида (1) в пространстве $R_n$ $n$-мерных векторов $X = (x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $\| x \|$ исследовалась в работах [19, 20]. Ниже приведем несколько утверждений об устойчивости решений систем уравнений вида (1). При этом конкретную норму не указываем, так как приведенные ниже условия устойчивости имеют общий вид.

**Теорема 1** [20]. Пусть задача Коши (1), (2) имеет установившееся решение $x^*(t)$. Пусть $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, .., n$, – функции, непрерывные при $t \ge 0$. Пусть при всех $t \ge 0$ выполнено условие

$$\Lambda\left(A(t)\right) + \left\|B(t)\right\| < 0.$$

Тогда решение $x^*(t)$ устойчиво.

Пусть при всех $t \ge 0$ выполнено условие

$$\Lambda\left(A(t)\right) + \left\|B(t)\right\| \le -\gamma(t) \le -\gamma^* < 0. \tag{3}$$

Тогда решение $x^*(t)$ асимптотически устойчиво и, более того,

$$\left\|u(t)\right\| = e^{-\gamma(t)/2} \left\|u_0\right\|,$$

где $u(t) = x(t) - x^*(t)$, $x(t)$ – решение возмущенной системы; $u_0$ – возмущение начальных условий при $t = 0$.

**Теорема 2** [20]. Пусть задача Коши (1), (2) имеет установившееся решение $x^*(t)$. Пусть $A(t) = \{a_{ij}(t)\}$, $B(t) = \{b_{ij}(t)\}$, $i, j = 1, 2, .., n$, – функции, непрерывные при $t \ge 0$. Пусть при всех $t$, $0 \le t < \infty$, выполняется условие (3). Тогда установившееся решение системы уравнений (1) асимптотически устойчиво при импульсном возмущении.

## 3. Устойчивость решений систем параболических уравнений

Для простоты обозначений ограничимся рассмотрением системы

$$\frac{\partial u_i(t, x_1, x_2)}{\partial t} = a_{i1}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + a_{i2}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{i3}(t) \frac{\partial^2 u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+ a_{i4}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1^2} + + a_{i5}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2} + a_{i6}(t) \frac{\partial^2 u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+ a_{i7}(t) \frac{\partial u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + a_{i8}(t) \frac{\partial u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_1} + a_{i9}(t) \frac{\partial u_1(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} +$$

$$+ a_{i10}(t) \frac{\partial u_2(t, x_1, x_2)}{\partial x_2} + a_{i11}(t) u_1(t, x_1, x_2) + a_{i12}(t) u_2(t, x_1, x_2),\ \ i = 1, 2, \tag{4}$$

с начальными условиями

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x),\ \ i=1,2. \tag{5}$$

Отметим, что приведенные ниже утверждения легко переносятся на системы линейных параболических уравнений более общего вида.

Будем считать, что начальная задача (4), (5) имеет при $t\ge 0$ единственное решение $u^*(t,x)=(u_1^*(t,x),u_2^*(t,x))$.

На протяжении всего этого раздела предполагается, что решение $u^*(t,x)$ задачи Коши (4), (5) и производная $\partial u^*(t,x)/\partial t$ суммируемы с квадратом по пространственным переменным.

Исследование устойчивости решения задачи Коши (4)–(5) будем проводить в банаховом пространстве $X$ вектор-функций $g(x_1,x_2)=$ $=(g_1(x_1,x_2),g_2(x_1,x_2))$ с нормой

$$\|g\|=\max_{i=1,2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|g_i(x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right]^{1/2}.$$

При каждом фиксированном значении $t$ норма вектор-функции $u(t,x)$ определяется формулой

$$\|u(t,x)\|=\max_{i=1,2}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u_i(t,x_1,x_2)|^2\,dx_1dx_2\right]^{1/2}.$$

Дадим начальным условиям возмущение, полагая

$$u_i(0,x)=\varphi_i(x)+\psi_i(x),\ \ i=1,2. \tag{6}$$

Обозначим через $\tilde{u}(t,x)$ решение начальной задачи (4), (6). Пусть $\tilde{u}(t,x)=u^*(t,x)+w(t,x)$. Тогда начальная задача (4), (6) трансформируется в следующую:

$$\frac{\partial w_i(t,x_1,x_2)}{\partial t}=a_{i1}(t)\frac{\partial^2 w_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+a_{i2}(t)\frac{\partial^2 w_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}+a_{i3}(t)\frac{\partial^2 w_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+$$

$$+a_{i4}(t)\frac{\partial^2 w_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2}++a_{i5}(t)\frac{\partial^2 w_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1\partial x_2}+a_{i6}(t)\frac{\partial^2 w_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+$$

$$+a_{i7}(t)\frac{\partial w_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}+a_{i8}(t)\frac{\partial w_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}+a_{i9}(t)\frac{\partial w_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2}+$$

$$+a_{i10}(t)\frac{\partial w_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2}+a_{i11}(t)w_1(t,x_1,x_2)+a_{i12}(t)w_2(t,x_1,x_2),\ \ i=1,2, \tag{7}$$

$$w_i(0,x)=\psi_i(x),\ \ i=1,2. \tag{8}$$

Применяя к начальной задаче (7), (8) преобразование Фурье по пространственным переменным, приходим к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) с параметром $\omega(\omega = (\omega_1, \omega_2))$:

$$\frac{\partial W(t, \omega_1, \omega_2)}{\partial t} = A(t, \omega_1, \omega_2) W(t, \omega_1, \omega_2), \tag{9}$$

$$W_j(0, \omega_1, \omega_2) = \psi_j(\omega_1, \omega_2),\ j = 1, 2, \tag{10}$$

здесь $W(t, \omega_1, \omega_2) = \left(W_1(t, \omega_1, \omega_2), W_2(t, \omega_1, \omega_2)\right)$. Через $W_i(t, \omega_1, \omega_2)$, $i = 1, 2$, обозначены преобразования Фурье функций $w_i(t, x_1, x_2)$, $i = 1, 2$, по пространственным переменным. Через $A(t, \omega_1, \omega_2) = \{a_{kl}(t, \omega_1, \omega_2)\}$, $k, l = 1, 2$, обозначена матрица с элементами:

$$a_{11}(t, \omega_1, \omega_2) = -\Big[a_{11}(t)\omega_1^2 + a_{12}(t)\omega_1\omega_2 +$$

$$+ a_{13}(t)\omega_2^2 - a_{1,11}(t) + i(a_{17}(t)\omega_1 + a_{19}(t)\omega_2)\Big],$$

$$a_{12}(t, \omega_1, \omega_2) = -\Big[a_{14}(t)\omega_1^2 + a_{15}(t)\omega_1\omega_2 +$$

$$+ a_{16}(t)\omega_2^2 - a_{1,12}(t) + i(a_{18}(t)\omega_1 + a_{1,10}(t)\omega_2)\Big],$$

$$a_{21}(t, \omega_1, \omega_2) = -\Big[a_{21}(t)\omega_1^2 + a_{22}(t)\omega_1\omega_2 +$$

$$+ a_{23}(t)\omega_2^2 - a_{2,11}(t) + i(a_{27}(t)\omega_1 + a_{29}(t)\omega_2)\Big],$$

$$a_{22}(t, \omega_1, \omega_2) = -\Big[a_{24}(t)\omega_1^2 + a_{25}(t)\omega_1\omega_2 +$$

$$+ a_{26}(t)\omega_2^2 - a_{212}(t) + i(a_{28}(t)\omega_1 + a_{2,10}(t)\omega_2)\Big].$$

Зафиксируем произвольное значение $-\infty < \omega_1^*, \omega_2^* < \infty$ и исследуем устойчивость решений системы ОДУ (9) с фиксированными значениями $(\omega_1^*, \omega_2^*)$.

Для этого достаточно исследовать устойчивость тривиального решения системы уравнений

$$\frac{\partial W(t, \omega_1^*, \omega_2^*)}{\partial t} = A(t, \omega_1^*, \omega_2^*) W(t, \omega_1^*, \omega_2^*). \tag{11}$$

Пусть при всех $t > 0$ выполняется условие

$$\Lambda(A(t, \omega_1^*, \omega_2^*)) \le -\gamma(t, \omega_1^*, \omega_2^*) < 0. \tag{12}$$

**Замечание 1.** Здесь можно не указывать конкретную логарифмическую норму, так как представляемые ниже утверждения об устойчивости решения системы (11) справедливы в произвольных банаховых пространствах. Однако при переходе к исследованию устойчивости решений системы уравнений параболического вида более удобным является использование пространств 2-мерных векторов $V = (v_1, v_2)$ с одной из норм: $\|V\|_1 = \sum_{k=1}^{2} |v_k|$ или $\|V\|_3 = \max_{1 \le k \le 2} |v_k|$. Для определенности остановимся на последней норме.

Из неравенства Винтнера [16] следует, что при выполнении условия (12) система ОДУ (9) при каждом фиксированном значении $(\omega_1^*, \omega_2^*)$ устойчива:

$$\left\|W(t, \omega_1^*, \omega_2^*)\right\| \le e^{-\int_0^t \gamma(\tau, \omega_1^*, \omega_2^*) d\tau} \left\|W(0, \omega_1^*, \omega_2^*)\right\| \le \left\|W(0, \omega_1^*, \omega_2^*)\right\|.$$

Если выполнено следующее условие: $\int_0^\infty \gamma(\tau, \omega_1^*, \omega_2^*) d\tau = \infty$, то система уравнений (9) асимптотически устойчива и, более того, справедливо неравенство

$$\left\|W(t, \omega_1^*, \omega_2^*)\right\| \le e^{-\int_0^t \gamma(\tau, \omega_1^*, \omega_2^*) d\tau} \left\|W(0, \omega_1^*, \omega_2^*)\right\|. \tag{13}$$

Очевидно, что неравенство (13) выполняется при каждом $(\omega_1, \omega_2)$.

Ограничившись исследованием в пространстве $R_3$, проведем следующие вкладки:

$$|W_k(t, \omega_1, \omega_2)| \le \max_{i=1,2} |W_i(t, \omega_1, \omega_2)| \le \max_{i=1,2} |W_i(0, \omega_1, \omega_2)| \le$$

$$\le |W_1(0, \omega_1, \omega_2)| + |W_2(0, \omega_1, \omega_2)|;$$

$$|W_k(t, \omega_1, \omega_2)|^2 \le 2\left(|W_1(0, \omega_1, \omega_2)|^2 + |W_2(0, \omega_1, \omega_2)|^2\right), k = 1, 2;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_k(t, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \le 2\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_1(0, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_2(0, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \right), k = 1, 2;$$

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_k(t, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2\right]^{1/2} \le 2^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_1(0, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_2(0, \omega_1, \omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \right)^{1/2} \le 2 \, \| W(0, \omega_1, \omega_2) \|, \; k = 1, 2.$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, из последнего неравенства имеем

$$\| w_k(t,x)\|^2 \le 2(\| w_1(0,x)\|^2 + \| w_2(0,x)\|^2) \le$$

$$\le 4\max_{i=1,2} \| w_i(0,x)\|^2 \le 4\| w_i(0,x)\|^2 .$$

Из полученного неравенства следует устойчивость установившегося решения задачи Коши (4), (5).

Остановимся на вопросе об асимптотической устойчивости решения задачи Коши (4), (5).

Пусть при всех $t > 0, \omega_1, \omega_2$ выполняется условие

$$\Lambda(A(t,\omega_1,\omega_2)) \le -\gamma(t) < 0, \ \int_0^\infty \gamma(\tau)d\tau = \infty. \tag{14}$$

Покажем, что в этом случае имеет место асимптотическая устойчивость решений задачи Коши (4), (5).

Для этого достаточно показать, что для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ найдется такое $T$, что при $t \ge T$ выполняется неравенство $\| w(t,x)\| \le \varepsilon$.

Пусть

$$\varepsilon_0 = \left[ 2\left( \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_1(0,\omega_1,\omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_2(0,\omega_1,\omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \right)\right]^{1/2} .$$

Рассмотрим уравнение (11). Из неравенства (12) следует, что

$$\left\| W(t,\omega_1^*,\omega_2^*)\right\|_{R_3} \le \exp\left\{ -\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \right\} \left\| W(0,\omega_1^*,\omega_2^*)\right\|_{R_3} ,$$

отсюда

$$|W_i(t,\omega_1^*,\omega_2^*)| \le \exp\left\{ -\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \right\} \left[ |W_1(0,\omega_1^*,\omega_2^*)| + |W_1(0,\omega_1^*,\omega_2^*)| \right], \ i = 1,2.$$

Следовательно,

$$|W_i(t,\omega_1^*,\omega_2^*)|^2 \le \exp\left\{ -2\int_0^t \gamma(\tau)d\tau \right\} \left[ |W_1(0,\omega_1^*,\omega_2^*)| + |W_1(0,\omega_1^*,\omega_2^*)| \right]^2, \ i = 1,2 .$$

Отсюда, учитывая, что $(\omega_1^*,\omega_2^*)$ – произвольно фиксированные точки, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_i(t,\omega_1,\omega_2)|^2 \, d\omega_1 d\omega_2 \le$$

$$\le 2\exp\left\{-2\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right\}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_1(0,\omega_1,\omega_2)|^2\, d\omega_1 d\omega_2 +\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |W_2(0,\omega_1,\omega_2)|]^2 d\omega_1 d\omega_2\right],\ i=1,2. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что

$$\left\|W(t,\omega_1,\omega_2)\right\| \le 2\exp\left\{-2\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right\}\varepsilon_0. \qquad (16)$$

Так как $\int_0^{\infty}\gamma(\tau)d\tau=\infty$ из (15), то для любого $\varepsilon>0$ существует такое $T$, что при $t>T$ $\left\|W(t,\omega_1,\omega_2)\right\|<\varepsilon$. Воспользовавшись равенством Парсеваля, заканчиваем доказательство асимптотической устойчивости задачи Коши (4), (5).

**Теорема 3.** Пусть задача Коши (4), (5) при всех $t\ge 0$ имеет установившееся решение $x^*(t,x_1,x_2)$. Пусть при всех $-\infty<\omega_1,\omega_2<\infty$ выполнены условия

$$\Lambda(A(t,\omega_1,\omega_2)) \le -\gamma(t,\omega_1,\omega_2)<0\ \left(\Lambda(A(t,\omega_1,\omega_2)) \le -\gamma(t), \int_0^{\infty}\gamma(\tau)d\tau=\infty\right).$$

Тогда установившееся решение задачи Коши устойчиво (асимптотически устойчиво).

## 4. Устойчивость решений систем параболических уравнений с запаздываниями по времени

Изложим метод исследования устойчивости решений систем параболических уравнений с запаздываниями по времени на примере системы уравнений

$$\frac{\partial u_j(t,x_1,x_2)}{\partial t} = a_{j1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{j2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} +$$

$$+a_{j3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1^2} + a_{j4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2^2} + a_{j5}(t)\frac{\partial u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_1} +$$

$$+a_{j6}(t)\frac{\partial u_1(t,x_1,x_2)}{\partial x_2} + a_{j7}(t)\frac{\partial u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_1} + a_{j8}(t)\frac{\partial u_2(t,x_1,x_2)}{\partial x_2} +$$

$$+a_{j9}(t)u_1(t,x_1,x_2) + a_{j10}(t)u_2(t,x_1,x_2) + b_{j1}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2} +$$

$$+b_{j2}(t)\frac{\partial^2 u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+b_{j3}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_1^2}+$$

$$+b_{j4}(t)\frac{\partial^2 u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_2^2}+b_{j5}(t)\frac{\partial u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_1}+$$

$$+b_{j6}(t)\frac{\partial u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)}{\partial x_2}+b_{j7}(t)\frac{\partial u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_1}+$$

$$+b_{j8}(t)\frac{\partial u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2)}{\partial x_2}+b_{j9}(t)u_1(t-\eta_1(t),x_1,x_2)+$$

$$+b_{j10}(t)u_2(t-\eta_2(t),x_1,x_2),\ j=1,2. \tag{17}$$

Обозначим через $u(t,x)$ вектор $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$.

Пусть $H=\max\limits_{1\le i\le 2}\sup\limits_{0\le t\le\infty}|\eta_i(t)|$.

Непрерывная вектор-функция $\varphi(t,x_1,x_2)=(\varphi_1(t,x_1,x_2),\varphi_2(t,x_1,x_2))$, определенная в области $[t_0-H,t_0]\times(-\infty,\infty)^2$, называется начальной функцией для системы (17):

$$u_i(t,x_1,x_2)=\varphi_2(t,x_1,x_2),\ i=1,2. \tag{18}$$

Решение $u(t,x_1,x_2)$ системы уравнений (17) с начальной функцией (18) обозначим через $u_\varphi$.

Будем считать, что решение начальной задачи (17), (18) существует при всех $t\ge 0$.

На протяжении этого раздела будем считать, что вектор-функция $u(t,x_1,x_2)$ суммируема с квадратом по пространственным переменным.

**Определение 1.** Решение $u_\varphi(t,x),x=(x_1,x_2)$ системы уравнений (17), определенное при всех $t\ge t_0-H$, называется устойчивым, если для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что из неравенства

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi(t,x)-\psi(t,x)\right|^2dx\right]^{1/2}\le\delta(\varepsilon)$$

при $t\in[t_0-H,t_0]$ следует, что решение $u_\psi(t,x)$ определено при всех $t\ge t_0$, $-\infty<x_1,x_2<\infty$ и выполняется неравенство

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|u_\varphi(t,x)-u_\psi(t,x)\right|^2dx\right]^{1/2}<\varepsilon \text{ при } t\ge t_0.$$

**Определение 2.** Решение $u_\varphi(t,x)$ называется асимптотически устойчивым, если выполнены условия предыдущего определения и, кроме того, для любой начальной функции $\psi(t,x)$, удовлетворяющей условию

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|u_{\varphi}(t,x)-u_{\psi}(t,x)\right|^{2}dx\right]^{1/2}\le\delta,\ t\in[t_0-H,t_0],\ -\infty<x_1,x_2<\infty,$$

выполняется равенство

$$\lim_{t\to\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|u_{\varphi}(t,x)-u_{\psi}(t,x)\right|^{2}dx\right]^{1/2}=0.$$

Исследуем устойчивость тривиального решения системы уравнений (17) при возмущении:

$$u_i(t,x_1,x_2)=\varphi_i(t,x_1,x_2),\ i=1,2,\ t\in[-H,0],\ -\infty<x_1,x_2<\infty. \tag{19}$$

Здесь и ниже полагаем $t_0=0$ .

Применим к начальной задаче (17), (19) преобразование Фурье по пространственным переменным. Положим $\omega=(\omega_1,\omega_2),\ -\infty<\omega_1,\omega_2<\infty.$

В результате приходим к задаче Коши:

$$\frac{\partial U_j(t,\omega)}{\partial t}=-U_1(t,\omega)\Big[\Big(a_{j1}(t)\omega_1^2+a_{j2}(t)\omega_2^2-a_{j9}(t)\Big)-i\Big(a_{j5}(t)\omega_1+a_{j6}(t)\omega_2\Big)\Big]-$$

$$-U_2(t,\omega)\Big[\Big(a_{j3}(t)\omega_1^2+a_{j4}(t)\omega_2^2-a_{j10}(t)\Big)-i\Big(a_{j7}(t)\omega_1+a_{j8}(t)\omega_2\Big)\Big]-$$

$$-U_1(t-\eta_1(t),\omega)\Big[\Big(b_{j1}(t)\omega_1^2+b_{j2}(t)\omega_2^2-b_{j9}(t)\Big)-i\Big(b_{j5}(t)\omega_1+b_{j6}(t)\omega_2\Big)\Big]-$$

$$-U_2(t-\eta_2(t),\omega)\Big[\Big(b_{j3}(t)\omega_1^2+b_{j4}(t)\omega_2^2-b_{j10}(t)\Big)-$$

$$-i\Big(b_{j7}(t)\omega_1+b_{j8}(t)\omega_2\Big)\Big],\ j=1,2, \tag{20}$$

при начальных условиях

$$U_j(t,\omega_1,\omega_2)=\varphi_j(t,\omega_1,\omega_2),\ t\in[-H,0],\ (\omega_1,\omega_2)\in(-\infty,\infty)^2. \tag{21}$$

В начальной задаче (20), (21) $\omega$ рассматривается как параметр.

Введем матрицы: матрицу

$$C(t,\omega)=\{c_{kl}(t,\omega)\},\ k,l=1,2,$$

с элементами:

$$c_{11}=-\Big[(a_{11}(t)\omega_1^2+a_{12}(t)\omega_2^2-a_{19}(t))-i(a_{15}(t)\omega_1+a_{16}(t)\omega_2)\Big],$$

$$c_{12}=-\Big[(a_{13}(t)\omega_1^2+a_{14}(t)\omega_2^2-a_{110}(t))-i(a_{17}(t)\omega_1+a_{18}(t)\omega_2)\Big],$$

$$c_{21}=-\Big[(a_{21}(t)\omega_1^2+a_{22}(t)\omega_2^2-a_{29}(t))-i(a_{25}(t)\omega_1+a_{26}(t)\omega_2)\Big],$$

$$c_{22}=-\Big[(a_{23}(t)\omega_1^2+a_{24}(t)\omega_2^2-a_{210}(t))-i(a_{27}(t)\omega_1+a_{28}(t)\omega_2)\Big]$$

и матрицу

$$D(t,\omega)=\{d_{kl}(t,\omega)\},\quad k,l=1,2,$$

с элементами:

$$d_{11}(t,\omega)=-\Big[(b_{11}(t)\omega_1^2+b_{12}(t)\omega_2^2-b_{19}(t))-i(b_{15}(t)\omega_1+b_{16}(t)\omega_2)\Big],$$

$$d_{12}(t,\omega)=-\Big[(b_{j3}(t)\omega_1^2+b_{j4}(t)\omega_2^2-b_{j10}(t))-i(b_{j7}(t)\omega_1+b_{j8}(t)\omega_2)\Big],$$

$$d_{21}(t,\omega)=-\Big[(b_{21}(t)\omega_1^2+b_{22}(t)\omega_2^2-b_{29}(t))-i(b_{25}(t)\omega_1+b_{26}(t)\omega_2)\Big],$$

$$d_{22}(t,\omega)=\Big[(b_{23}(t)\omega_1^2+b_{24}(t)\omega_2^2-b_{210}(t))-i(b_{27}(t)\omega_1+b_{28}(t)\omega_2)\Big].$$

Зафиксируем произвольное значение $(\omega_1^*,\omega_2^*)$ и исследуем в метрике пространства $R_3$ устойчивость тривиального решения системы уравнений (20).

Из результатов работы [20] следует, что если

$$\gamma_1(t,\omega)=\Lambda(C(t,\omega))+\|D(t,\omega)\|<0,$$

то при каждом фиксированном $\omega^*=(\omega_1^*,\omega_2^*)$ выполняется неравенство $\|u(t,\omega^*)\|\le\|u(0,\omega^*)\|$, $t\ge 0$.

Следовательно, $\|u(t,\omega)\|\le\|u(0,\omega)\|$ при всех $-\infty<\omega_1,\,\omega_2<\infty$.

Интегрируя предыдущее неравенство по переменным $(\omega_1,\omega_2)$ и повторяя рассуждения, приведенные в предыдущем разделе, приходим к неравенству

$$\|U(t,\omega)\|\le 2\exp\left\{2\int_0^t\gamma_1(\tau,\omega)d\tau\right\}\|U(0,\omega)\|\le 2\|U(0,\omega)\|, \tag{22}$$

из которого следует, что решение задачи Коши (20), (21) устойчиво.

Применяя равенство Парсеваля к обеим частям неравенства (22), по аналогии с рассуждениями предыдущего раздела имеем

$$\|u(t,x)\|\le 2\|u(0,x)\|. \tag{23}$$

Из неравенства (23) следует устойчивость решения задачи Коши (17), (18).

Если выполнено условие

$$\Lambda(C(t,\omega))+\|D(t,\omega)\|<-\gamma(t),$$

$$\gamma(t)>0,\ \int_0^\infty\gamma(t)dt=\infty,$$

то имеет место асимптотическая устойчивость задачи Коши (19), (20).

Действительно, из предыдущих рассуждений вытекает неравенство

$$\|u(t,x)\| \leq 2\exp\left\{-2\int_0^t \gamma(\tau)d\tau\right\}\|u(0,x)\| \leq \varepsilon,$$

из которого следует асимптотическая устойчивость задачи Коши (17), (18).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполнены следующие условия:

1) начальная задача (17), (18) имеет при $t \in [0;\infty)$ установившееся решение $x^*(t)$;

2) выполнены условия:

$$\Lambda(C(t,\omega)) + \|B(t,\omega)\| < -\gamma(t) < 0,\ t \in [0,\infty),\ -\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty,$$

$$\Lambda(A(t,\omega)) + \|B(t,\omega)\| < -\gamma < 0,\ t \in [0,\infty),\ -\infty < \omega_1, \omega_2 < \infty.$$

Тогда установившееся решение начальной задачи (17), (18) устойчиво (асимптотически устойчиво).

**Замечание.** В работе [23] получены достаточные условия устойчивости решений систем ОДУ с разрывными правыми частями. Воспользовавшись этими результатами и повторяя рассуждения, приведенные выше, можно получить достаточные условия устойчивости и асимптотической устойчивости решений систем параболических уравнений с запаздываниями и с разрывными правыми частями.

## Заключение

Предложен метод построения достаточных условий устойчивости решений систем линейных параболических уравнений с запаздыванием. Метод основан на трансформации преобразованием Фурье исходной системы нелинейных параболических уравнений к соответствующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями и исследовании устойчивости последней. Достаточные условия выражаются через коэффициенты исходной системы параболических уравнений. Предложенный метод может быть распространен на другие виды уравнений математической физики.

## Список литературы


1. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. М. : Мир, 1985. 376 с.
2. Сиразетдинов Т. К. Устойчивость систем с распределенными параметрами. М. : Наука, 1987. 232 с.
3. Шестаков А. А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М. : Наука, 1990. 320 с.
4. Gil' M. I. Norm estimations for operator-valued functions and applicaions. Marcel Dekker, 1995. 355 p.
5. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика. Ижевск : Издательский дом. Удмурдский университет, 2000. 200 с.
6. Бойков И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза : Изд-во ПГУ, 2008. 244 с.

7. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве // Итоги науки и техники. Математический анализ. 1983. Т. 21. С. 130–264.
8. Эйдельман С. Д. Параболические уравнения. Дифференциальные уравнения с частными производными // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. 1990. Т. 63. С. 201–313.
9. Бойков И. В., Паксялева О. Г., Романова Л. Д. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2009. № 4. С. 20–26.
10. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Критерии устойчивости решений дифференциальных уравнений в частных производных параболического типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2012. Т. 14, № 3. С. 12–20.
11. Kolev D., Donchev T., Nakagawa K. Weakened condition for the stability to solutions of parabolic equations with "maxima"// Journal of Prime Research in Mathematics. 2013. Vol. 9. P. 148–158.
12. Алхутов Ю. А., Денисов В. Н. Необходимое и достаточное условие стабилизации к нулю решения смешанной задачи для недивергентных параболических уравнений // Труды Московского математического общества. 2014. Т. 75, № 2. С. 277–308.
13. Nguyen Thieu Huy, Vu Thi Ngoc Ha, Pham Truong Xuan. Boundedness and stability of solutions to semi-linear equations and applications to fluid dynamics // Communications on Pure and Applied Analysis. 2016. Vol. 15 (6). P. 2103–2116. doi: 10.3934/cpaa.2016029
14. Butuzov V. F., Nefedov N. N., Recke L., Schneider K. R. Existence, asymptotics, stability and region of attraction of a periodic boundary layer solution in case of a double root of the degenerate equation // Comput. Math. Math. Phys. 2018. Vol. 58. P. 12.
15. Кащенко С. А. Усреднение по пространственной переменной в нелинейных параболических системах // Труды Московского математического общества. 2019. Т. 80, № 1. С. 63–86.
16. Zhabko A. P., Shindyapin A. I., Provotorov V. V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. 2019. Т. 15, № 4. С. 457–471. doi:10.21638/11702/spbu10.2019.404
17. Erhardt A. H. Stability of Weak Solutions to Parabolic Problems with Nonstandard Growth and Cross-Diffusion // Axioms. 2021. Vol. 10. P. 14. doi: 10.3390/axioms 10010014
18. Колесов Ю. С. Исследование устойчивости решений параболических уравнений второго порядка в критическом случае // Известия Академии наук СССР. Сер.: Математика. 1969. Т. 33, № 6. С. 1356–1372.
19. Бойков И. В. Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 4. С. 435–457.
20. Бойков И. В. Достаточные условия устойчивости систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздываниями, зависящими от времени. I. Линейные уравнения // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. 2018. № 4. С. 5–21.
21. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М. : Наука, 1970. 536 с.
22. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М. : Мир, 1988. 334 с.
23. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with discontinuous right-hand sides: Applications to Hopfield artificial neural networks // Mathematics. 2022. Vol. 10 (9). P. 1524. doi:10.3390/math10091524

## References


1. Khenri D. *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy = Geometric theory of semilinear parabolic equations*. Moscow: Mir, 1985:376. (In Russ.)
2. Sirazetdinov T.K. *Ustoychivost' sistem s raspredelennymi parametrami = Stability of systems with distributed parameters*. Moscow: Nauka, 1987:232. (In Russ.)
3. Shestakov A.A. *Obobshchennyy pryamoy metod Lyapunova dlya sistem s raspredelennymi parametrami = Generalized direct Lyapunov method for systems with distributed parameters*. Moscow: Nauka, 1990:320. (In Russ.)
4. Gil' M.I. *Norm estimations for operator-valued functions and applicaions*. Marcel Dekker, 1995:355.
5. Pu T. *Nelineynaya ekonomicheskaya dinamika = Nonlinear economic dynamics.* Izhevsk: Izdatel'skiy dom. Udmurd-skiy universitet, 2000:200. (In Russ.)
6. Boykov I.V. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy = Stability of solutions to differential equations*. Penza: Izd-vo PGU, 2008:244. (In Russ.)
7. Kreyn S.G., Khazan M.I. Differential equations in a Banach space. *Itogi nauki i tekhniki. Matematicheskiy analiz = Results of science and technology. Mathematical analysis*. 1983;21:130–264. (In Russ.)
8. Eydel'man S.D. Parabolic equations. Partial differential equations. *Itogi nauki i tekhniki. Seriya Sovremennye problemy matematiki. Fundamental'nye napravleniya = Results of science and technology. Series modern problems of mathematics. Fundamental directions*. 1990;63:201–313. (In Russ.)
9. Boykov I.V., Paksyaleva O.G., Romanova L.D. Stability of solutions to partial differential equations of parabolic type. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2009;(4):20–26. (In Russ.)
10. Boykov I.V., Ryazantsev V.A. Stability criteria for solutions of partial differential equations of parabolic type. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva = Journal of the Middle Volga Mathematical Society*. 2012;14(3):12–20. (In Russ.)
11. Kolev D., Donchev T., Nakagawa K. Weakened condition for the stability to solutions of parabolic equations with "maxima". *Journal of Prime Research in Mathematics*. 2013;9:148–158.
12. Alkhutov Yu.A., Denisov V.N. A necessary and sufficient condition for the stabilization to zero of the solution of a mixed problem for nondivergent parabolic equations. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva = Proceedings of Moscow Mathematical Society*. 2014;75(2):277–308. (In Russ.)
13. Nguyen Thieu Huy, Vu Thi Ngoc Ha, Pham Truong Xuan. Boundedness and stability of solutions to semi-linear equations and applications to fluid dynamics. *Communications on Pure and Applied Analysis*. 2016;15(6):2103–2116. doi:10.3934/cpaa.2016029
14. Butuzov V.F., Nefedov N.N., Recke L., Schneider K.R. Existence, asymptotics, stability and region of attraction of a periodic boundary layer solution in case of a double root of the degenerate equation. *Comput. Math. Math. Phys*. 2018;58:12.
15. Kashchenko S.A. Averaging over a spatial variable in nonlinear parabolic systems. *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva = Proceedings of Moscow Mathematical Society*. 2019;80(1):63–86. (In Russ.)
16. Zhabko A.P., Shindyapin A.I., Provotorov V.V. Stability of weak solutions of parabolic systems with distributed parameters on the graph. *Vestnik Sankt-Peterburgskogo universiteta. Prikladnaya matematika. Informatika. Protsessy upravleniya = Bulletin of Saint-Petersburg University. Applied Mathematics. Computer science. Management processes*. 2019;15(4):457–471. doi:10.21638/11702/spbu10.2019.404
17. Erhardt A.H. Stability of Weak Solutions to Parabolic Problems with Nonstandard Growth and Cross-Diffusion. *Axioms*. 2021;10:14. doi:10.3390/axioms 10010014
18. Kolesov Yu.S. Investigation of the stability of solutions of second-order parabolic equations in the critical case. *Izvestiya Akademii nauk SSSR. Ser.: Matematika = Proceed-*

*ings of the Academy of Sciences of the USSR. Series: Mathematics*. 1969;33(6):1356–1372. (In Russ.)

19. Boykov I.V. Stability of steady-state solutions to systems of nonlinear nonautonomous delay differential equations. *Differentsial'nye uravneniya = Differential equations*. 2018;54(4):435–457.
20. Boykov I.V. Sufficient conditions for the stability of systems of ordinary differential time-dependent delay equations. Part 1. Linear equations. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko-matematicheskie nauki = University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences*. 2018;(4):5–21. (In Russ.)
21. Daletskiy Yu.L., Kreyn M.G. *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovom prostranstve = Stability of solutions to differential equations in a Banach space*. Moscow: Nauka, 1970:536. (In Russ.)
22. Dekker K., Verver Ya. *Ustoychivost' metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy = Stability of Runge-Kutta methods for stiff nonlinear differential equations*. Moscow: Mir, 1988:334. (In Russ.)
23. Boykov I., Roudnev V., Boykova A. Stability of solutions to systems of nonlinear differential equations with discontinuous right-hand sides: Applications to Hopfield artificial neural networks. *Mathematics*. 2022;10(9):1524. doi:10.3390/math10091524

**Информация об авторах / Information about the authors**

***Илья Владимирович Бойков***
доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (Россия, г. Пенза, ул. Красная, 40)

***Il'ya V. Boykov***
Doctor of physical and mathematical sciences, professor, professor of the sub-department of higher and applied mathematics, Penza State University (40 Krasnaya street, Penza, Russia)

E-mail: boikov@pnzgu.ru

**Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов / The author declares no conflicts of interests**.

**Поступила в редакцию / Received** 10.01.2023

**Поступила после рецензирования и доработки / Revised** 20.02.2023

**Принята к публикации / Accepted** 11.03.2023